一回述語論理と数学の基礎

京都大学文学部第 5 講義室

2015 年 12 月 5 日 (土)10:30〜12:30

1　はじめに

1.1　数学とは

数学の対象や扱い方は歴史的に変化してきたが、19 世紀ごろから集合概念を用いて数学的対象を扱うということが主流になり、現在ではほぼこの流儀で数学を行っている。19 世紀から始まったこの流儀による数学を現代数学と呼ぶことにして、ここでは現代数学について説明していく。

集合概念が重宝されるようになった理由として、集合の厳密性と表現力があげられる。

まず厳密性については、例として、$\epsilon - \delta$ 論法について見てみる。$\epsilon - \delta$ 論法とは関数の連続性を定義するための方法だが、素朴に関数の連続性というものをグラフに書いたときに連続につながっているかどうかというふうに定義してみる。この定義はグラフにうまく書けないような関数に対してそもそも破綻しているし、人間の認知に強く依存するため、人によって解釈が異なる可能性もある。

そこで $\epsilon - \delta$ 論法では関数 $f(x)$ の点 a 連続性を、

$$^\forall \epsilon > 0, ^\exists \delta > 0, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

と定義する。このようにすれば普遍的で厳密な定義になる。集合概念を用いるとこのような定義をすることができる。*1

さらにこの定義は普通の関数に関わらず色々なものに対して適応できるので、普段使っている連続性という概念を他の対象にも輸入できる。例えば、普通の関数は数を代入して数を返すが、ここで人のグループを代入してそのグループの親密さを返すような関数を考えると、今までのように図に頼った定義ではよくわからないが、集合を用いた定義をすれば、連続性を定義することができる。

これも集合の表現力の一つである。さらに集合は無限や構造といったものも表現できる。

1.2　集合とは

では今まで集合を用いてきたが、そもそも集合の定義はなんだろうか。素朴に考えてみよう。集合はものの集まりである。

では、全ての集合の集合 V について考えてみる。もし V を含む集合 V' が存在すると V' も集合なので V' は V に含まれる、これはおかしいので、V を含む集合は存在しない。それは V 自身にも言えるので、$V \notin V$ が成り立つ。しかし V は全ての集合の集合であって V 自身も集合なので $V \in V$ これは矛盾である。

この矛盾を解消するにはどうしたら良いだろうか。自己言及的なもの以外でもこのような矛盾は起きてしまう。集合というものに制限を加えてやればこの矛盾を解消できるが、集合の利点であった表現力が損なわれてしまう。また、この矛盾を解消したとしても他に矛盾がないのかという心配は残る。

*1 注：集合論を用いなくても $\epsilon - \delta$ 論法は定式化できるがここでは後の都合からこれを例に採用した。

そこで数学に矛盾がないことを証明しようとした数学者がヒルベルトである。ヒルベルトは公理主義と有限の立場から数学を形式化することによって、数学の無矛盾性を証明しようとした。しかし、このような議論をするためには証明というものも定義しないといけない。ここで用いられたのが一回述語論理である。今回は一回述語論理の入門をまず行う。

そして一回述語論理を組み立てたら、その上で公理から集合というものを定義することで、数学を扱うのに十分な表現力を持った集合概念を定義できる。このような集合論を公理的集合論というが、現代数学は、一回述語論理の上の公理的集合論を基礎として行う立場がほとんどである。

さらにこの講義では、現代数学の特徴である、構造を対象とした数学というものも紹介する。

2 一回述語論理

一回述語論理とは、数学の対象と数学をするという営みを形式化するための体系である。数学の営みを適切な有限の操作に落とし込むということを今から行う。

定義

1. 定数記号
2. n 項関数記号
3. n 項関係記号

を言語といい、$\mathscr{L}$ で表す。関数記号は n 個の定数を代入すると定数を返すもので、関係記号は n 個の定数を代入すると 0 か 1 を返すものである。

例えば例として、算術の言語を $\mathscr{L}_A = \{+, \times, 0, 1, \leq\}$ とすると、これは一つの言語である。$+$ や $\times$ は二つの数を代入すると一つの数を返す。(1+1=2)これらは 2 項関数である。0,1 は定数、$\leq$ は二つの数を代入すると、それが大きいか小さいかに応じて真か偽(1 か 0)を返す。($0 \leq 1$ は真、$1+1 \leq 1$ は偽など)これは 2 項関係である。

言語はある議論を形式化するのに必要最低限の記号のことです。算術の言語は自然数とその計算をするのに最低限の記号ということです。またいつでも使う特別な記号として $=$ というのも入れておきます。

言語はある意味単語のようなもので次に定義するのは文節に対応する項です。

定義

項を以下で定義する。

1. 変数記号、定数記号は項である
2. f が n 項関数記号、$t_1, \cdots, t_n$ は項である。このとき $f(t_1, \cdots, t_n)$ は項である。
3. 以上のみが項である

ここで変数記号とはなんらかの定数記号を代入できる記号である。

次に論理式を定義します。

定義

R を n 項関係記号、$t_1, \cdots, t_n$ は項である。このとき、$R(t_1, \cdots, t_n)$ を原子論理式と定義する。以下で論理式を定義する。

1. 原子論理式は論理式である
2. ϕ, ψ が論理式であるとき、$\neg\phi, \phi \wedge \psi, \phi \vee \psi, \phi \to \psi, \phi \leftrightarrow \psi$ は論理式である。
3. ϕ が論理式のとき、$^\forall x(\phi), ^\exists x(\phi)$ は論理式である。
4. 以上のみが論理式である。

項の定義で変数記号というものがあったが、変数記号の扱い方がちゃんと明記されており閉じている論理式を文と呼ぶ。

変

数 x が論理式の中で $^\forall x(\cdots x \cdots)$ という形（あるいは $^\exists x(\cdots x \cdots)$ という形）をしている変数 x のことを束縛変数という。束縛変数でない変数を自由変数といい、自由変数を持たない論理式を文という。

文の幾つかの集まりを公理系と言い、数学をするにあたって議論の足場となるものである。

定義

$\mathscr{L}$ の文の集合を $\mathscr{L}$ の理論あるいは公理系という。公理系の要素を公理という。

今定義した文は形式的な文で、言語も単なる記号の列、要は文法規則だけが決まった文のようなものである。これに意味を与えるのが構造というものである。構造は記号の意味の集合とその記号との対応として定義される。

定義

$\mathscr{L}$ の構造 とは集合 M と Str の組である。ただし、

1. M は空ではない、M を宇宙という
2. $\mathscr{L}$ の定数記号 c,n 項関数 f,n 項関係 R に体操する M の要素、M 上の n 項冠す、M 上の n 項関係をそれぞれ c, f, R の 上の解釈といい、s の解釈を s と書く。
3. $str = \{s\}$ とする。

構造は文の意味を定めるものである。文の意味が定まると文の真偽が決定できるようになる。ここでの定義は帰納的に論理式を定義したので、その帰納的定義に従って

定義

を $\mathscr{L}$ の構造、ϕ, ψ を $\mathscr{L}$ の論理式とする。このとき $\models \phi$（ϕ は で真）というのを以下で定める。

1. $\models t_1 = t_2 \Leftrightarrow t_1 = t_2$
2. $\models R(t_1, \cdots t_n) \Leftrightarrow (t_1, \cdots, t_n) \in R$
3. $\models \neg\phi \Leftrightarrow \neg[\ \models]$
4. $\models \phi \vee \psi \Leftrightarrow\ \models \phi$ または $\models \psi$
5. $\models \phi \wedge \psi \Leftrightarrow\ \models \phi$ かつ $\models \psi$
6. $\models \phi \to \psi \Leftrightarrow\ \models \psi$
7. $\models^\exists x\phi \Leftrightarrow\ \models \phi(x = c)$ なる $c \in M$ が存在
8. $\models^\forall x\phi \Leftrightarrow$ すべての $c \in M$ に対して $\models \phi(x = c)$

3 のときを偽であるという。

どんな理論の要素（公理）もその構造で正しいとき、その構造は理論のモデルであるという。すなわち、そ

の理論に対して正しい文の解釈を与えているものがモデルである。

定義

が $\mathscr{L}$ の理論 T が $^{\forall}\phi \in T, \models \phi$ であるとき は T のモデルであるという。

さらにどんなモデルでも真になるような文はその理論からどんな解釈によっても真である文ということで、その理論の定理という。

定義

T のにのモデル が $\models \phi$ を満たすとき $T \models \phi$ とかき、ϕ は T の定理という。

これによって形式化された客観的な文章である論理式の真偽を議論できるようになった。次に証明するということを定義する。証明とは公理と有限の推論からたどり着けるような文に対して、その有限な操作のことである。どのような有限の操作が許されるのかということを定義する。

証明

以下の公理を定め述語論理の推論規則という。

1. $\phi \to (\psi \to \phi)$
2. $(\phi \to (\psi \to \rho)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \rho))$
3. $(\neg\phi \to \neg\psi) \to (\psi \to \phi)$
4. ϕ と $\phi \to \psi$ から ψ を得る
5. $^{\forall}x\phi(x) \to \phi(x/t)$
6. $^{\forall}x(\phi \to \psi) \to (\phi \to^{\forall} x\psi)$
7. $^{\forall}x(x = x)$
8. $^{\forall}x,^{\forall}y(x = y \to (\phi(x/t) \to \psi(y/t)$
9. ϕ から $^{\forall}x\phi$ を得る。

ただしここで $\phi(x/t)$ は変数 x に項 t を代入した論理式 ϕ のことである。

3 は三段論法,8 は一般化などと特別な名前が付いているが、ここで定めているのはどれも自明に正しいだろうと誰もが認めることで、これら以外にも別の方法でこれと同等な推論規則を定めることもできる。

さらにこの推論規則を用いて証明を定義する。

定義

ϕ を $\mathscr{L}$ の論理式とする。$\mathscr{L}$ の理論 T における ϕ の証明とは、$\mathscr{L}$ の論理式 $\phi_i(0 \leq i \leq n)$ で書く ϕ_i は T の公理か上の推論規則、またはそれで得られるものであり、$\phi_n = \phi$ となるような有限列 $\phi_1, \cdots, \phi_n$ のことである。
ϕ の証明が存在するとき、$T \vdash \phi$ とかき、ϕ は T で証明可能であるという。

さて、上のように証明ということを定義した。ここから次の演繹定理というものが導かれ、証明の書き方はもう少し簡易化しても良いということがわかる。

演繹定理

以下は同値

1. $T \cup \{\phi\} \vdash \psi$
2. $T \vdash \phi \to \psi$

厳密な証明の定義に立ち返ると、新しい定理を証明する際にもいちいち公理から証明しないといけないわけだが、演繹定理と三段論法より、すでに証明した定理は公理と同じように扱っても良いということがわかる。

さて、今、論理式が真であるということと論理式が証明可能であるというのを別々の方法で定義した。したがって真である論理式は証明可能か、あるいは証明可能な論理式は真であるかというような疑問が湧く。これは決して自明なことではないが、一回述語論理の場合はこの 2 つは成り立つことがわかる。すなわち、

完全性定理

以下は同値

1. $T \models \phi$
2. $T \vdash \phi$

が成り立つ。1 から 2 がわかることを完全性、2 から 1 がわかることを健全性と言うこともある。この完全性定理が成り立つことから一回述語論理を数学の基礎づけにすることの正当性も主張できる。つまり、真であるが証明できないという非常に残念ことはないという幸運な知らせがここからわかるのである。

ここで言う完全性というのは不完全性定理の完全性とは意味が異なる。一回述語論理から不完全性定理も証明できる。

不完全性定理

T は算術を含む理論である。T が無矛盾ならば、

1. ある $\mathscr{L}$ の文 ϕ が存在して、$T \nvdash \phi$ かつ $T \nvdash \neg\phi$
2. T が無矛盾であること $Con(T)$ は T で証明可能でない。

1,2 はそれぞれ第一第二不完全性定理と呼ばれる。1 は証明可能でも、その否定の文が証明可能でもないような文が存在するということである。真と証明可能は同値なので、これはいわば真でも偽でもない文が存在するということである。そして 2 は 1 からの帰結として得られるが、こちらが問題で、どんな理論でもそのの無矛盾性はその理論からは証明できないということである。

もともと数学の形式化の目的の一つとして、数学の体系の無矛盾性を証明したいというものがあった。しかし第二不完全性定理からどんな体系も自己の無矛盾性を証明できないということが証明された。

理論の無矛盾性はその理論からは証明できないが、ではどれくらい理論を強くすればもとの理論の無矛盾性を証明できるのかということが問題になってくる。これは逆に捉えると無矛盾性が証明できるというところから理論同士の強弱を定めることができる。無矛盾性が理論の強弱を定める指標になるということである。実際に、現代数学でよく用いられる集合論の公理系の無矛盾性はより強い公理系から証明できるということなどは分かっている。

また無矛盾性が等しいということも重要になってきます。例えばある理論に公理を付け加えた新しい理論を考えると、この理論は矛盾しやすくなっているかもしれないが、無矛盾性が同値であれば、その心配はなく、公理を付け加えることの正当性を主張できたりする。

このような性質は理論同士の性質を議論するのに重要なものとなり理論の理論、数学の数学が発展するようになった。そのような数学の数学のことを数学基礎論ということが多い。

よく不完全性定理から数学は不完全であるということを書いている文章などがよく見られるが不完全性定理はそのような主張ではないし、数学が不完全というのはよく分からない主張である。数学の体系は一つではなくて、それぞれの理論の間には強さがあり、論理式の中にはその体系から証明できないものも存在するが、それはある意味で論理式がそれだけ多様であるということである。

3　公理的集合論と数学の構造

3.1　公理的集合論

さて、これで一回述語論理の体系を定義できた。これにより数学的主張の真偽を定義でき、その証明を定義できた。最後に集合論の言語と公理を与える。集合論の言語は $\{\in\}$ で、一つの記号しか用いない。構造としては、$V = \{x : x = x\}$、$\in$ として定める。公理として次の 9 つを入れるのが一般的である。

1. ${}^\forall x, {}^\forall y({}^\forall z(z \in x \to z \in y) \to x = y)$
2. ${}^\forall z {}^\forall y_1, \cdots, {}^\forall y_n, {}^\exists u, {}^\forall x(x \in u \leftrightarrow (x \in z \wedge \phi(x))$
3. ${}^\forall z, {}^\exists u, {}^\forall x({}^\exists y(s \in y \wedge y \in z) \to x \in u)$
4. ${}^\forall x, {}^\forall y, {}^\exists u(s \in u \wedge y \in u)$
5. ${}^\forall z, {}^\exists u, {}^\forall x(x \subset z \to x \in u)$
6. ${}^\exists u, (\emptyset \in u \wedge {}^\forall x \in u(S(x) \in u)$
7. ${}^\forall z {}^\forall y_1, \cdots, {}^\forall y_n({}^\forall x \in z {}^{\exists!} y\phi(x, y) \to {}^\exists u {}^\forall x \in z {}^\exists y \in u(\phi(x)))$
8. ${}^\forall x(x \notin \emptyset \to {}^\exists y \in x(x \cap y = \emptyset))$
9. ${}^\forall z, \exists u(u$ は z 上の整列順序)

ただし、$\emptyset$ は、2 の ϕ に $(x \notin z)$ を代入してできる集合で、これは 1 から一意に定まることがわかる。$S(x)$ は x に対して $\{x\}$ を返す関数記号で、これは集合になる。また整列順序は 1 から 8 の公理から適切に集合として形式化できる概念である。3、4 から $\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ というようにして集合の列を作ることができる。

以上の 9 つの公理を置くのが最も一般的な集合論の公理系で ZFC 公理系という。上の公理は 1 を除き ${}^\exists u$ という形をしているが、このときに存在するものを集合という。つまり ${}^\exists$ 記号によって存在を保証されるものが集合であり、それ以外は集合ではない。この公理系に基づけば全ての集合のあつまりというものは集合ではない。（このようなものを真のクラスという。）このようにして集合概念は一回述語論理とその上の公理系によって定義される。

3.2　数学の構造

ここまでで集合を構成することができた。この集合に意味づけを与えるのが構造である。例えば、自然数 $0, 1, 2, \cdots$ というのも当然構造だが、これらは各集合同士に適当な関係性（構造）があるのでこれを自然数と思うのである。自然数の場合は順序と和の構造で、$0 < 1 < 2 < \cdots$ で $1 + 1 = 2$ などが成り立つ点に 0,1,2 と名前が付いているのである。ここで $0 := \emptyset, 1 := \{\emptyset\}, 2 := \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \cdots$ というようにし、$<$ を $\in$ で定義すれば上の不等号の関係を満たす。$+$ 記号は適切な二項関数として定義でき二項関数もまた集合として定義できる。このような関係性を集合に定めて集合に意味づけを行うことで数学の対象を作り出すことができる。

最初に集合の有用な性質としてその表現力を挙げたが、この構造も集合で表現できる。現代数学では集合と構造によって数学的対象を表現しているが、これは結局構造自体を対象にしているということである。

よく考える構造の例として、順序構造、代数構造、位相構造がある。順序構造はその名の通り順序を定める構造で、代数構造は足し算や掛け算など演算に関する構造である。位相構造はものの近さや形についての構造で、この 3 つの構造は数学において非常に基本的な構造である。また、集合の量という性質を与える構造や空間の一様性など、様々な構造がある。

構造を考える何よりの利点は、同じ構造を持っている様々な対象について一度にその性質を調べることができるという点である。また上のように様々な構造の組み合わせとして対象を捉えれば、それぞれの構造について調べることでその対象の様々な性質がわかるし、あるいはいくつかの構造の組み合わさって生まれる性質なども調べることができる。